Marius PERIANU Florian DUMITREL

Matematică

clasa a IX-a

semestrul I

filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, ştiințe ale naturii)
filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)
filiera vocațională : profil militar (matematică-informatică)

CLUBUL MATEMATICIENILOR

CUPRINS

ALGEBRĂ Capitolul 1. Mulţimea numerelor reale

ALGEBRĂ Capitolul 2. Elemente de logică matematică

ALGEBRĂ Capitolul 3. Şiruri de numere reale

GEOMETRIE **Capitolul 4. Vectori în plan**

GEOMETRIE **Capitolul 5. Concurenţă, coliniaritate, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană**

SINTEZE **Capitolul 6. Variante de subiecte pentru teză**

CAPITOLUL 1

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Tema 1.1
Numere raţionale şi iraţionale. Reprezentări zecimale

Notăm cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{Z}$ mulţimea numerelor întregi. Astfel, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ şi $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.

Fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ $(a,c\in\mathbb{Z},\ b,d\in\mathbb{Z}^*)$ se numesc *echivalente* dacă $ad=bc$; scriem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu o fracţie dată se numeşte *număr raţional*. Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr raţional cu oricare dintre fracţiile echivalente care îl reprezintă. Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$. Aşadar,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\ \middle|\ p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\right\}.$$

Cu ajutorul algoritmului de împărţire a două numere naturale, orice fracţie ordinară $\frac{p}{q}$ $(p\geq 0,\ q>0)$ se poate scrie sub formă de fracţie zecimală periodică, cu perioada diferită de (9). Reciproc, orice fracţie periodică, cu perioada diferită de (9), se poate scrie sub formă de fracţie ordinară.

Dacă a este o *fracţie periodică simplă*, adică are forma $a=a_0,(a_1a_2...a_p)$, unde $a_0\in\mathbb{N}$ şi $a_1,a_2,...,a_p\in\{0,1,2,...,9\}$, atunci

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_p}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}}.$$

În cazul când a este *fracţie periodică mixtă*, adică $a=a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+p})$, avem

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}}-\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}\underbrace{00...0}_{k\ ori}}.$$

$\mathbb{Q}$ este mulţimea tuturor fracţiilor periodice (fracţiile zecimale finite sunt considerate fracţii periodice cu perioada (0)).

Există fracţii zecimale infinite şi neperiodice, de exemplu $a=0{,}1010010001...$. O astfel de fracţie zecimală se numeşte *număr iraţional*.

Reunind mulţimea numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale obţinem *mulţimea numerelor reale* pe care o notăm cu $\mathbb{R}$. Aşadar, $\mathbb{R}$ este mulţimea tuturor fracţiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

*

1. ***a)*** Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, fracția $\dfrac{2m+1}{3m+2}$ este ireductibilă.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\dfrac{n+2}{3n+1}$ este reductibilă.

2. Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:

a) 5; ***b)*** $\dfrac{13}{8}$; ***c)*** $\dfrac{3}{4}$; ***d)*** $-\dfrac{3}{20}$; ***e)*** $\dfrac{14}{11}$;

f) $\dfrac{481}{125}$; ***g)*** $-\dfrac{2}{3}$; ***h)*** $\dfrac{31}{13}$; ***i)*** $\dfrac{77}{75}$; ***j)*** $-\dfrac{47}{66}$.

3. Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:
a) $5,(7)$; ***b)*** $-1,(13)$; ***c)*** $0,23(7)$; ***d)*** $-1,01(02)$; ***e)*** $-3,2(123)$.

4. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este posibil ca a^2 și a^3 să fie numere raționale?

5. ***a)*** Aflați a $100-a$ zecimală a numărului rațional $\dfrac{1}{13}$.

b) Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.

6. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$. Arătați că, dacă $ma \in \mathbb{Z}$ și $na \in \mathbb{Z}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.

7. Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de o infinitate de ori, atunci numărul este rațional.

8. Arătați că un număr rațional pozitiv $\dfrac{p}{q}$ $\left(p, q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1\right)$ se reprezintă ca fracție zecimală finită dacă și numai dacă $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

**

9. Se consideră numărul $a = 0,101001000100001\ldots$.
a) Arătați că a este număr irațional.
b) Aflați a $1000-a$ zecimală a numărului a.
c) Calculați suma primelor 1000 zecimale ale numărului a.

10. ***a)*** Fie $x, y \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y \cdot a = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.

b) Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.

11. Demonstrați afirmațiile:
a) dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
b) dacă $r \in \mathbb{Q}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
c) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
d) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:

a) $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2,\ k \in \mathbb{N}$; *b)* $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

13. Arătați că există o infinitate de perechi (a,b) de numere iraționale cu $a+b \in \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

14. Arătați că numărul $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este irațional.

15. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5^n+2}$; *b)* $\sqrt{7n+3}$; *c)* $\sqrt{n^2+5n+7}$; *d)* $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

16. Determinați numerele naturale k pentru care numărul $\sqrt{k^2+3k+14}$ este rațional.

17. Fie mulțimea $M = \left\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a^2-3b^2=1\right\}$. Arătați că:

a) $2+\sqrt{3} \in M$;
b) $x,y \in M \Rightarrow xy \in M$;
c) M este infinită.

18. *a)* Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{m},\ \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

b) Determinați perechile (x,y) de numere naturale astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\sqrt{3}$.

19. Fie $a,b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a+b \in \mathbb{Q}$ și $m,n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Arătați că numerele $a-b$ și $ma+nb$ sunt iraționale.

***

20. Determinați $x,y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0,58(3)$.

21. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

22. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+21}$ este rațional.