

Tradus și adaptat la cunoștințele de 50 de ani a celor doi autori (profesori, desigur), lucrarea de ceea ce urmă o serie și stilul auxiliarelor de matematică operează în direcția creșterii matematicienilor.

Înțelegerea corespunzătoare și corecta a unui enunț matematic este și securitatea în rezolvarea sa. Înțelegerea și rezolvarea unui enunț matematic începe cu o parangere.

# Matematică

Carecă temă urmă și subiecte compuse, situații, teoreme, înșiruri de probleme și demonstrații (acest lucru este necesar), reprezentând un sprijin existent atât pentru elevi cât și pentru profesori. Partea engleză este destinată să propună elevilor să folosească dicționare și să aplice cunoștințele într-o formă practică.

## clasa a IX-a

În cadrul fiecărui tema sunt date și unele de bază, care legătătătoare și exercitări semestrul I

În cadrul fiecărui tema sunt date și unele de bază, care legătătoare și exercitări semestrul I

În cadrul fiecărui tema sunt date și unele de bază, care legătătoare și exercitări semestrul I

**filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)**

**filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)**

**filiera vocatională : profil militar (matematică-informatică)**

În cadrul fiecărui tema sunt date și unele de bază, care legătătoare și exercitări. Acolo unde apare pentru prima dată un nou tip de problemă, imediat după enunțul acestuia sunt oferite indicații sau și soluții parțiale.

Toate problemele au răspunsuri și soluții detaliate; o atenție specială, concretizată în explicitarea unei metode de rezolvare a unor probleme de geometrie, pentru a face mai ușoară acostarea elevilor cu abordarea vectorială a geometriei.



*Autorii*

## CUPRINS

### ALGEBRĂ Capitolul 1. Multimea numerelor reale

1.1. Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale .....	9
1.2. Operații algebrice cu numere reale .....	12
1.3. Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere) .....	15
<i>Teste de evaluare</i> .....	20
1.4. Ordonarea numerelor reale .....	22
1.5. Inegalități algebrice (extindere) .....	25
1.6. Intervale de numere reale. Operații cu intervale .....	29
<i>Teste de evaluare</i> .....	32
1.7. Modulul unui număr real .....	33
1.8. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real .....	36
1.9. Aproximări ale numerelor reale .....	39
<i>Teste de evaluare</i> .....	42
1.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	43

### ALGEBRĂ Capitolul 2. Elemente de logică matematică

2.1. Propoziție. Predicat. Operații logice elementare .....	49
2.2. Raționament prin reducere la absurd .....	55
2.3. Inducția matematică .....	57
<i>Teste de evaluare</i> .....	60
2.4. Multimi .....	61
2.5. Probleme de numărare .....	65
<i>Teste de evaluare</i> .....	68
2.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	69

### ALGEBRĂ Capitolul 3. Siruri de numere reale

3.1. Siruri de numere reale. Siruri monotone. Siruri mărginite .....	75
3.2. Progresii aritmetice .....	78
3.3. Progresii geometrice .....	80
3.4. Probleme cu progresii aritmetice și geometrice .....	83
<i>Teste de evaluare</i> .....	87
3.5. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	89

4.1. Segment orientat. Relația de echipolență. Vectori .....	95
4.2. Adunarea vectorilor .....	98
4.3. Înmulțirea vectorilor cu scalari .....	100
4.4. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari .....	102
4.5. Reper cartezian în plan .....	105
<b>Teste de evaluare .....</b>	<b>108</b>

**GEOMETRIE Capitolul 5. Concurență, coliniaritate, paralelism.**
**Calcul vectorial în geometria plană**

5.1. Vectorul de poziție al unui punct. Teorema lui Thales.....	111
5.2. Centre de greutate. Relația lui Leibniz .....	115
5.3. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris ...	118
5.4. Ortocentrul unui triunghi. Relația lui Sylvester .....	121
5.5. Teorema lui Menelau. Probleme de coliniaritate .....	124
5.6. Teorema lui Ceva. Probleme de concurență .....	187
<b>Teste de evaluare .....</b>	<b>130</b>
5.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	132

**SINTEZE Capitolul 6. Variante de subiecte pentru teză**

6. Variante de subiecte pentru teză – semestrul I .....	139
---	-----

<b>SOLUȚII .....</b>	<b>143</b>
----------------------	------------

<b>Indice de autori .....</b>	<b>203</b>
-------------------------------	------------

<b>Bibliografie .....</b>	<b>205</b>
---------------------------	------------

## MULTIMEA NUMERELOR REALE

**Tema 1.1.** Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

**Tema 1.2.** Operații algebrice cu numere reale

**Tema 1.3.** Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)

**Teste de evaluare**

**Tema 1.4.** Ordonarea numerelor reale

**Tema 1.5.** Inegalități algebrice (extindere)

**Tema 1.6.** Intervale de numere reale. Operații cu intervale

**Teste de evaluare**

**Tema 1.7.** Modulul unui număr real

**Tema 1.8.** Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

**Tema 1.9.** Aproximări ale numerelor reale

**Teste de evaluare**

**Tema 1.10.** Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

## Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

Notăm cu  $\mathbb{N}$  mulțimea numerelor naturale și cu  $\mathbb{Z}$  mulțimea numerelor întregi. Astfel,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  și  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Fracțiile  $\frac{a}{b}$  și  $\frac{c}{d}$  ( $a, c \in \mathbb{Z}$ ,  $b, d \in \mathbb{Z}^*$ ) se numesc *echivalente* dacă  $ad = bc$ ; scriem

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește *număr rațional*.

Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr rațional cu oricare dintre fracțiile echivalente care îl reprezintă. Mulțimea numerelor raționale se notează cu  $\mathbb{Q}$ . Așadar,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Cu ajutorul algoritmului de împărțire a două numere naturale, orice fracție ordinară  $\frac{p}{q}$

( $p \geq 0$ ,  $q > 0$ ) se poate scrie sub formă de fracție zecimală periodică, cu perioada diferită de (9). Reciproc, orice fracție periodică, cu perioada diferită de (9), se poate scrie sub formă de fracție ordinară.

Dacă  $a$  este o *fracție periodică simplă*, adică are forma  $a = a_0, (a_1 a_2 \dots a_p)$ , unde  $a_0 \in \mathbb{N}$  și  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , atunci

$$a = a_0 + \overline{a_1 a_2 \dots a_p}_{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}}}.$$

În cazul când  $a$  este *fracție periodică mixtă*, adică  $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p})$ , avem

$$a = a_0 + \overline{a_1 a_2 \dots a_{k+p}}_{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}}} - \overline{a_1 a_2 \dots a_k}_{\underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ ori}}}.$$

$\mathbb{Q}$  este mulțimea tuturor fracțiilor periodice (fracțiile zecimale finite sunt considerate fracții periodice cu perioada (0)).

Există fracții zecimale infinite și neperiodice, de exemplu  $a = 0,1010010001\dots$ . O astfel de fracție zecimală se numește *număr irațional*.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale obținem *mulțimea numerelor reale* pe care o notăm cu  $\mathbb{R}$ . Așadar,  $\mathbb{R}$  este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Au loc inclusiunile:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .



**1. a)** Arătați că, pentru orice  $m \in \mathbb{N}$ , fracția  $\frac{2m+1}{3m+2}$  este ireductibilă.

**b)** Determinați  $n \in \mathbb{N}$  pentru care fracția  $\frac{n+2}{3n+1}$  este reductibilă.

**2.** Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:

- a)** 5;    **b)**  $\frac{13}{8}$ ;    **c)**  $\frac{3}{4}$ ;    **d)**  $-\frac{3}{20}$ ;    **e)**  $\frac{14}{11}$ ;  
**f)**  $\frac{481}{125}$ ;    **g)**  $-\frac{2}{3}$ ;    **h)**  $\frac{31}{13}$ ;    **i)**  $\frac{77}{75}$ ;    **j)**  $-\frac{47}{66}$ .

**3.** Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:

- a)** 5,(7);    **b)** -1,(13);    **c)** 0,23(7);    **d)** -1,01(02);    **e)** -3,2(123).

**4.** Fie  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Este posibil ca  $a^2$  și  $a^3$  să fie numere raționale?

**5. a)** Aflați a 100-a zecimală a numărului rațional  $\frac{1}{13}$ .

**b)** Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.

**6.** Fie  $a \in \mathbb{Q}$  și  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(m, n) = 1$ . Arătați că, dacă  $ma \in \mathbb{Z}$  și  $na \in \mathbb{Z}$ , atunci  $a \in \mathbb{Z}$ .

**7.** Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de infinitate de ori, atunci numărul este rațional.

**8.** Arătați că un număr rațional pozitiv  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $(p, q) = 1$ ) se reprezintă ca fracție

zecimală finită dacă și numai dacă  $q = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ , unde  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ .



**9.** Se consideră numărul  $a = 0,101001000100001\dots$ .

**a)** Arătați că  $a$  este număr irațional.

**b)** Aflați a 1000-a zecimală a numărului  $a$ .

**c)** Calculați suma primelor 1000 zecimale ale numărului  $a$ .

**10. a)** Fie  $x, y \in \mathbb{Q}$  și  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Arătați că  $x + y \cdot a = 0$  dacă și numai dacă  $x = y = 0$ .

**b)** Fie  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ . Arătați că  $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$  dacă și numai dacă  $x = y = z = 0$ .

**11. Demonstrați afirmațiile:**

**a)** dacă  $r \in \mathbb{Q}$  și  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

**b)** dacă  $r \in \mathbb{Q}^*$  și  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

**c)** dacă  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

**d)** dacă  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $a > 0$ , atunci  $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

12. Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Arătați că:

a)  $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2, k \in \mathbb{N}$ ;

b)  $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ .

13. Arătați că există o infinitate de perechi  $(a, b)$  de numere iraționale cu  $a + b \in \mathbb{Q}$  și  $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ .

14. Arătați că numărul  $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$  este irațional.

15. Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , următoarele numere sunt iraționale:

a)  $\sqrt{5^n + 2}$ ;    b)  $\sqrt{7n+3}$ ;    c)  $\sqrt{n^2 + 5n + 7}$ ;    d)  $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ .

16. Determinați numerele naturale  $k$  pentru care numărul  $\sqrt{k^2 + 3k + 14}$  este rațional.

17. Fie mulțimea  $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 3b^2 = 1\}$ . Arătați că:

a)  $2 + \sqrt{3} \in M$ ;

b)  $x, y \in M \Rightarrow xy \in M$ ;

c)  $M$  este infinită.

18. a) Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că  $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$  dacă și numai dacă  $\sqrt{m}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ .

b) Determinați perechile  $(x, y)$  de numere naturale astfel încât  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10\sqrt{3}$ .

19. Fie  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  astfel încât  $a + b \in \mathbb{Q}$  și  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ . Arătați că numerele  $a - b$  și  $ma + nb$  sunt iraționale.



20. Determinați  $x, y \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,58(3)$ .

21. Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , numărul  $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$  este irațional.

22. Determinați numerele naturale  $n$  pentru care numărul  $\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+21}$  este rațional.